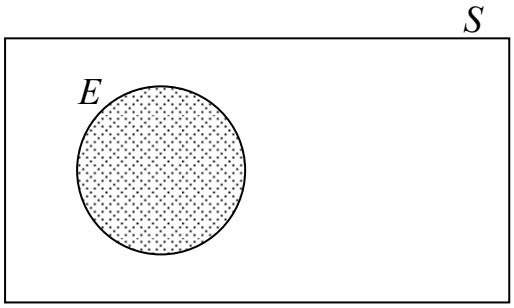
احتمال



اگر E یک پیشامد از فضای نمونه ای S باشد. در این صورت احتمال وقوع پیشامد E را با توجه به نوع فضای نمونه ای ، به یکی از صورت های زیر تعریف می کنیم.

الف : اگر E و S متناهی و گسسته (شمارا) باشند. در این صورت ، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی بر تعداد اعضای فضای نمونه ای نظیر آن را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

ب : اگر E و S نامتناهی و پیوسته (ناشمارا) باشند. در این صورت ، حالت های زیر را داریم:

۱: اگر E و S زیر مجموعه ی R باشند ، خارج قسمت طول بازه ی E بر طول بازه ی S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{l(E)}{l(S)}$$

۲: اگر E و S زیر مجموعه ی $R^{۲}$ باشند ، خارج قسمت سطح E بر سطح S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}$$

۳: اگر E و S زیر مجموعه ی $R^{۳}$ باشند ، خارج قسمت حجم E بر حجم S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{V(E)}{V(S)}$$

***

تمرین : در پرتاب یک تاس ، احتمال آن را حساب کنید که مضرب ۳ بیاید.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad \rightarrow n(S)=۶$

پیشامد تصادفی $E=\{۳,۶\} \quad \rightarrow n(E)=۲$

www.mathtower.ir

احتمال آمدن مضرب ۳ $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

***

تمرین : ۲۰ کارت که روی هر یک از آنها شماره ای منحصر بفرد از یک تا بیست نوشته شده است ، خوب بـه هـم زده و یک کارت از بین آنها استخراج می کنیم. احتمال آن را بنویسید که :

الف : عدد فرد بیاید. ج : عدد بزرگتر از ۱۳ بیاید. هـ : عدد کمتر از ۲۴ بیاید.

ب : عدد اول بیاید. د : عدد بیشتر ۲۵ بیاید.

حل :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}\rightarrow n(S)=۲۰$

الف: .....

$A=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}\quad\rightarrow n(A)=۱۰$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$

ب : .....

$B=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}\quad\rightarrow n(B)=۸$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$

ج : .....

$C=\{۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}\quad\rightarrow n(C)=۷$

$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۷}{۲۰}$

د : .....

$D=\{\}=\Phi\quad\rightarrow n(D)=۰$

$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۰}{۲۰}=۰$

هـ : .....

$$E = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\} \rightarrow n(E) = ۲۰$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۲۰} = ۱$$

***

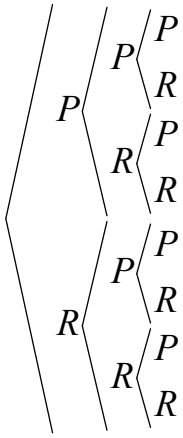
تمرین : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که :

الف : سه بار رو بیاید. د : سه سکه همنام رخ دهد. ز : سکه ی اول و سکه دوم همنام باشند.

ب : فقط دو پشت بیاید. هـ : لاقل دو رو بیاید.

ج : دو پشت به دنبال هم بیاید. و : حداکثر دو پشت رخ دهد.

حل :



$$S = \{PPP, PPR, PRP, PRR, RPP, RPR, RRP, RRR\} \rightarrow n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

الف : .....

$$A = \{RRR\} \rightarrow n(A) = ۱$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۸}$$

ب : .....

$$B = \{PPR, PRP, RPP\} \rightarrow n(B) = ۳$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

ج : .....

$$C=\{PPP,PPR\ ,RPP\}\rightarrow n(C)=۳$$
$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

د : .....

$$D=\{PPP,RRR\}\rightarrow n(D)=۲$$
$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

هـ : .....

$$E=\{RPR,PRR,RRP,RRR\}\rightarrow n(E)=۴$$
$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

و : .....

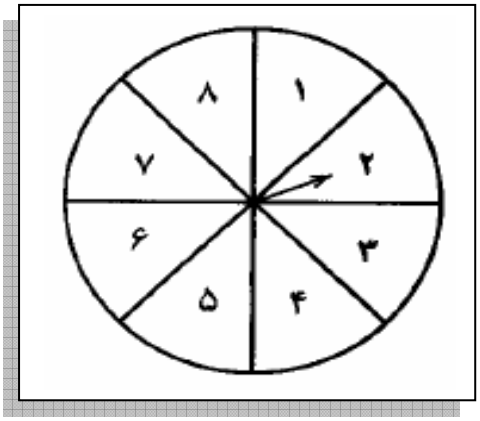
$$F=\{RRR,PRR,RPR,RRP,PPR,PRP,RPP\}\rightarrow n(F)=۷$$
$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{۷}{۸}$$

ز : .....

$$G=\{PPP,PPR\ ,RRP,RRR\}\rightarrow n(G)=۴$$
$$P(G)=\frac{n(G)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

***

تمرین : عقربه ای مطابق شکل زیر ، پس از به حرکت در آمدن به تصادف روی یکی از ۸ ناحیه ی شکل می ایستد و عددی را نشان می دهد.



الف : فضای نمونه ای را بنویسید.

ب : احتمال آن را به دست آورید که عقربه عدد اول را نشان دهد.

ج : احتمال آن را به دست آورید که عقربه روی مضرب ۳ بایستد.

د : احتمال آن را به دست آورید که عقربه عدد اول یا فرد را نشان دهد.

تمرین : دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. فضای نمونه ای را تشکیل دهید و احتمال آن را حساب کنید که :

الف : مجموع شماره های دو تاس برابر ۶ شود. ج : مجموع شماره های دو تاس مضربی از ۵ شود.

ب : مجموع شماره های دو تاس بیشتر از ۹ شود. د : تفاضل شماره های دو تاس صفر شود.

حل : فضای نمونه ای

$$\begin{array}{cccccc}(۱,۱) & (۱,۲) & (۱,۳) & (۱,۴) & (۱,۵) & (۱,۶)\\ (۲,۱) & (۲,۲) & (۲,۳) & (۲,۴) & (۲,۵) & (۲,۶)\\ (۳,۱) & (۳,۲) & (۳,۳) & (۳,۴) & (۳,۵) & (۳,۶)\\ (۴,۱) & (۴,۲) & (۴,۳) & (۴,۴) & (۴,۵) & (۴,۶)\\ (۵,۱) & (۵,۲) & (۵,۳) & (۵,۴) & (۵,۵) & (۵,۶)\\ (۶,۱) & (۶,۲) & (۶,۳) & (۶,۴) & (۶,۵) & (۶,۶)\end{array}$$

$$n(S)=۳۶$$

الف : .....

$$A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\} \rightarrow n(A)=۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$$

ب : .....

$$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\} \rightarrow n(B)=۶$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ج : .....

$$C=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\} \rightarrow n(C)=۷$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۷}{۳۶}$$

د : .....

$$D=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\} \rightarrow n(A)=۶$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

تمرین : ۴۰ کارت هم اندازه به رنگ های سبز و قرمز و سفید و آبی داریم. روی هر یک از آنها شماره های یک تا ده نوشته شده است. تعداد کارت های رنگ های مختلف با هم مساوی است. اگر کارت ها را خوب به هم بزنیم و سپس یک کارت استخراج کنیم، احتمال آن را حساب کنید که :

الف: کارت بیرون آمده آبی باشد. ب : شماره ی کارت بیرون آمده عدد اول باشد.

ج : شماره ی کارت بیرون آمده بر ۶ بخش پذیر باشد. د : کارت بیرون آمده سبز و شماره ی روی آن مضرب ۳ باشد.

حل :

فضای نمونه ای

سفید	آبی	سبز	قرمز
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

$$\Rightarrow n(S)=۴۰$$

الف :

$$\Rightarrow n(A)=۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{۴}$$

ب :

$$\Rightarrow n(B)=۱۶$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۴۰}=\frac{۲}{۵}$$

ج :

$$\Rightarrow n(C)=۴$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۴۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

د :

$$\Rightarrow n(D)=۳$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۳}{۴۰}$$

***

تمرین : در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۲ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه یک مهره به تصادف استخراج می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که :

الف : مهره ی بیرون آمده سبز باشد. ب : مهره ی بیرون آمده سبز یا سفید باشد.

ج : مهره ی بیرون آمده سبز نباشد.

حل : تعداد کل مهره ها ۱۰ است.

الف : تعداد مهره های سبز ۳ است. $P(A)=\frac{۳}{۱۰}$

ب : تعداد مهره های سبز یا سفید ۸ است. $P(B)=\frac{۸}{۱۰}$

ج : تعداد مهره هایی که سبز نیستند برابر ۷ است. $P(C)=\frac{۷}{۱۰}$

***

تمرین : از بین اعداد طبیعی از ۱۰ تا ۱۰۰ به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد.

حل :

$$S=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۰۰\}\rightarrow n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۰+۱=۹۱$$
$$E=\{۱۶,۲۴,...,۹۶\}\rightarrow n(E)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۶}{۸}+۱=۱۱$$
$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۹۱}$$

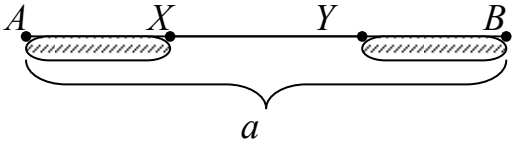
***

تمرین : یک عدد به تصادف از فاصله ی $[۲,۵]$ انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد بدست آمده عضو فاصله ی $[۳,۵]$ باشد.

حل :

$$\left.\begin{array}{l}S=[۲,۵]\rightarrow L(S)=۵-۲=۳\\E=[۳,۵]\rightarrow L(E)=۵-۳=۲\end{array}\right\}\rightarrow P(E)=\frac{L(E)}{L(S)}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین : قطعه نخی به طول a به تصادف از یک نقطه قطع می شود. مطلوبست احتمال اینکه یک قطعه بیشتر از دو برابر قطعه ی دیگر باشد.



حل: ابتدا قطعه نخ را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم. در این صورت بدیهی است که

$$S=\{X \mid X \in AB\}=\{X \mid AX<AB\}=\{X \mid AX<a\} \rightarrow L(S)=a$$

$$E=\{X \mid AX<\frac{XB}{۲}\} \rightarrow L(E)=۲(\frac{۱}{۳}a)=\frac{۲}{۳}a$$

$$P(E)=\frac{L(E)}{L(S)}=\frac{\frac{۲}{۳}a}{a}=\frac{۲}{۳}$$

***

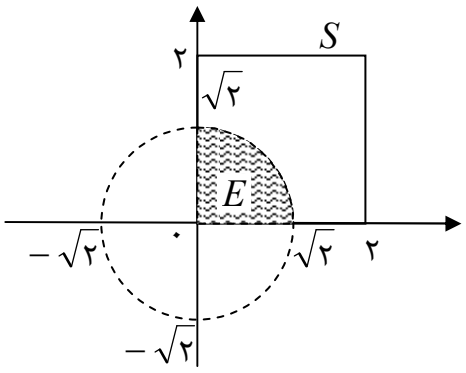
تمرین : نقطه ی (x,y)را به تصادف از فاصله ی $[۰,۲]$ انتخاب می کنیم.احتمال اینکه $x^۲+y^۲<۲$ باشد، چقدر است.

حل :

$$A(S)=a^۲=۲^۲=۴$$

$$A(E)=\frac{\pi R^۲}{۴}=\frac{\pi(\sqrt{۲})^۲}{۴}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{۴}=\frac{\pi}{۸}$$



***

تمرین : یک تیر به تصادف به سمت یک سیبل به شعاع ۲ متری رها می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که

الف : این تیر در شعاع کمتر از ۱ متری مرکز به سیبل برخورد کند.

ب : الف : این تیر در شعاع بیشتر از ۱ متری مرکز به سیبل برخورد کند.

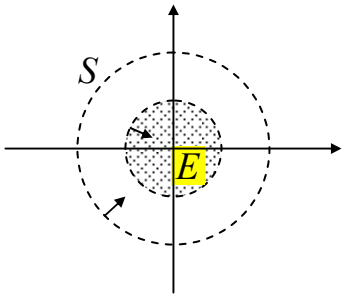
حل:

فضای نمونه ای $S=\{(x,y)\,|\,x^۲+y^۲<۴\}\rightarrow A(S)=\pi(۲)^۲=۴\pi$

الف)

پیشامد تصادفی $E=\{(x,y)\,|\,x^۲+y^۲<۱\}\rightarrow A(E)=\pi(۱)^۲=\pi$

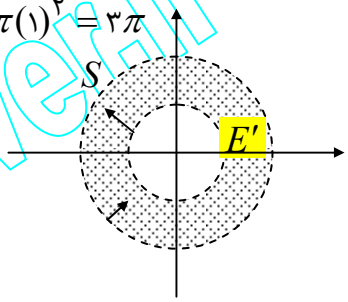
$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۴}$$



ب)

پیشامد تصادفی $E'=\{(x,y)\,|\,x^۲+y^۲>۱\}\rightarrow A(E')=\pi(۲)^۲-\pi(۱)^۲=۳\pi$

$$P(E')=\frac{A(E')}{A(S)}=\frac{۳\pi}{۴\pi}=\frac{۳}{۴}$$

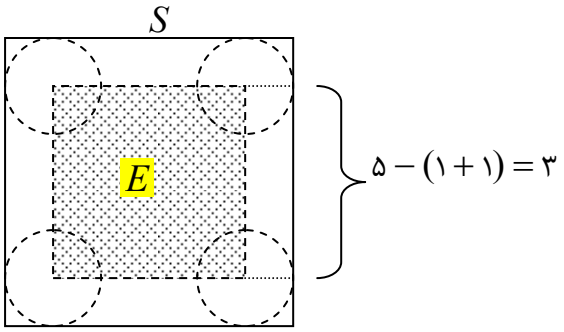


www.mathtower.ir

***

تمرین: سکه ای به شعاع یک سانتی متر را به طرف مربعی به ضلع ۵ سانتی متر می اندازیم. احتمال آن را بیابید که سکه کاملاً داخل مربع قرار گیرد.

حل: بیرونی ترین سکه هایی که کاملاً درون مربع قرار می گیرند، بر اضلاع آن مماس می باشند. لـذا مراکـز چنـین سـکه هایی مربعی به ضلع ۳ سانتی متر تشکیل می دهند.



$$A(S)=۵^۲=۲۵$$

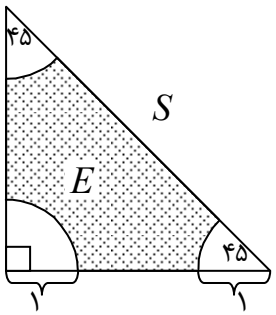
$$A(E)=۳^۲=۹$$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{۹}{۲۵}$$

***

تمرین: نقطه ای به تصادف درون مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین که طول هر ساق آن ۳ سانتی متر است، انتخاب می کنیم. مطلوبست محاسبه ی احتمال آن که فاصله ی این نقطه از هر رأس مثلث بیشتر از یک سانتی متر باشد.

حل: مجموع مساحت قطاع های بوجود آمده روی رئوس مثلث ، با در نظر گرفتن زاویه ها ، برابر مساحت یک نیم دایره به شعاع یک سانتی متر است.



$$A(S)=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳=\frac{۹}{۲}$$

$$A(E)=\frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}\times \pi(۱)^{۲}=\frac{۹-\pi}{۲}$$

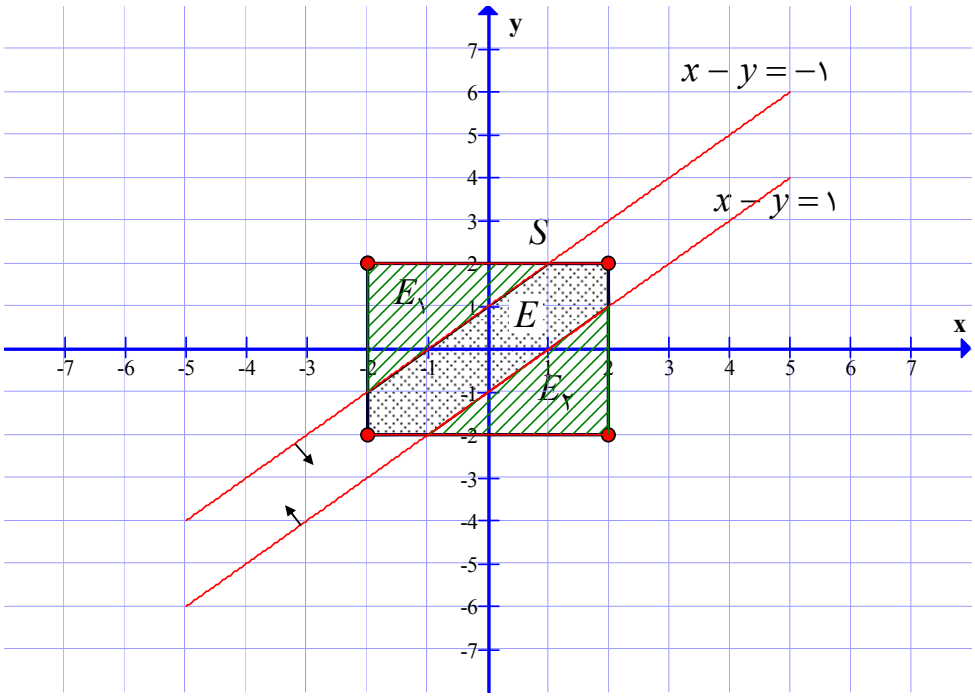
$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{۹-\pi}{۲}}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۹-\pi}{۹}$$

***

تمرین: دو عدد به تصادف از فاصله ی $[-۲,۲]$ انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که قدرمطلق تفاضل این دو عدد از یک کمتر باشد.

حل :

$$E=\{(x,y)\,|\,|x-y|<۱\}=\{(x,y)\,|-۱<x-y<۱\}$$



$$A(S)=a^{۲}=۴^{۲}=۱۶$$

$$A(E)=A(S)-A(E_{۱})-A(E_{۲})$$

$$\xrightarrow{A(E_{۱})=A(E_{۲})} A(E)=A(S)-۲A(E_{۱})=۱۶-۲(\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳)=۱۶-۹=۷$$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{۷}{۱۶}$$

***

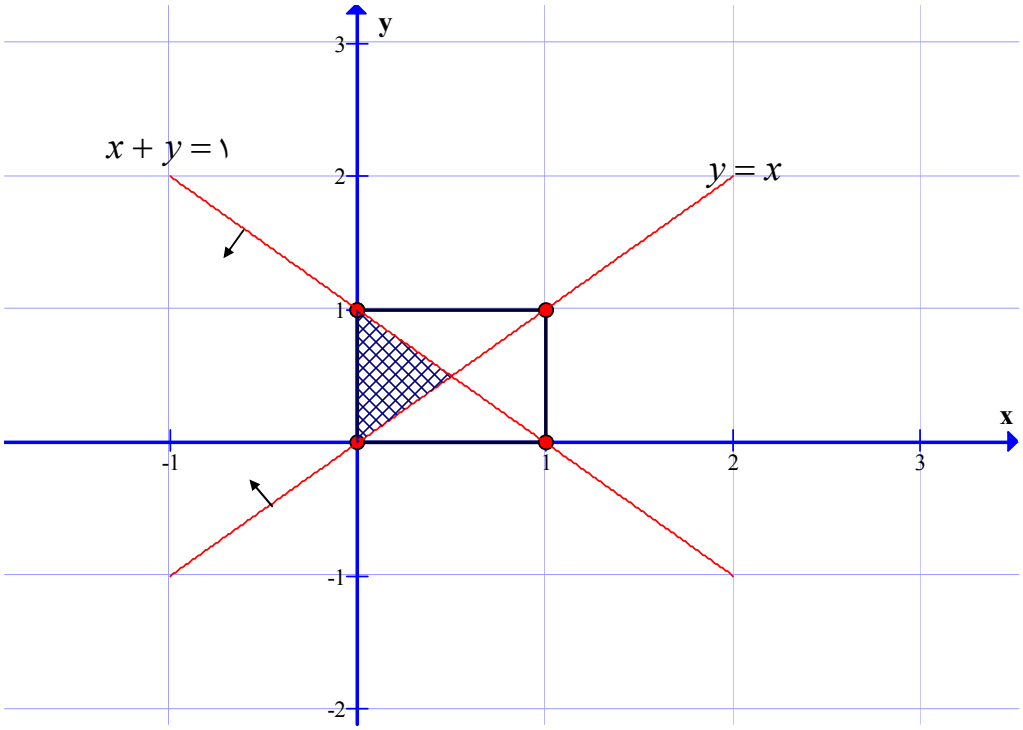
تمرین : درون مربعی به ضلع یک ، نقطه ی (x,y) به طور تصادفی انتخاب می شود. احتمال آن را پیدا کنید که $x\le y\le ۱-x$ باشد.

حل : برای این آزمایش فضای نمونه ای زیر را می توان در نظر گرفت.

$$S=\{(x,y)\,|\,۰<x<۱,۰<y<۱\}=(۰,۱)\times(۰,۱)$$

همچنین پیشامد تصادفی زیر است.

$$E=\{(x,y)\,|\,x\le y\le ۱-x\,\}\qquad\rightarrow\begin{cases}x\le y\rightarrow x-y\le ۰\\ y\le ۱-x\rightarrow x+y\le ۱\end{cases}$$



اکنون با توجه به شکل داریم: $A(E)=\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۱}{۴}$ و $A(S)=۱\times۱=۱$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۴}$$

***

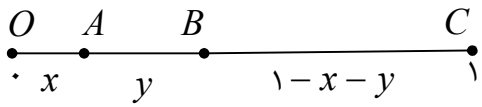
تمرین : در بازه ی $[۰,۱]$ دو نقطه به طور تصادفی طوری انتخاب می شوند که بازه را به سه پاره خط تقسیم کنند. احتمال این را پیدا کنید که سه پاره خط تشکیل یک مثلث بدهند.

حل : برای این آزمایش فضای نمونه ای زیر را می توان در نظر گرفت.

$$S=\{(x,y)\,|\,۰<x<۱,۰<y<۱\}=(۰,۱)\times(۰,۱)$$

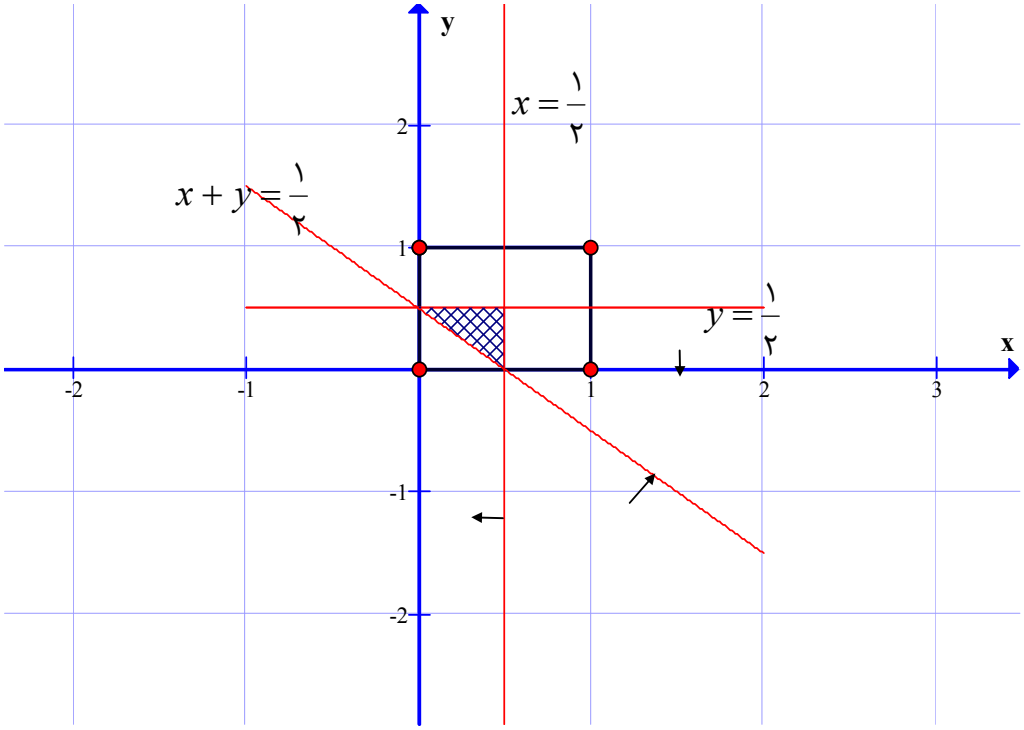
در این حالت طول پاره خط های سازنده ی مثلث به شکل زیر در خواهند آمد.

$$x \text{ و } y \text{ و } ۱-x-y$$



حال با توجه به قضیه ی نامساوی مثلثی ، پیشامد تصادفی زیر را تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} x+y>۱-x-y \\ x+(۱-x-y)>y \\ y+(۱-x-y)>x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y>\frac{۱}{۲} \\ y<\frac{۱}{۲} \\ x<\frac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow E=\{(x,y)\,|\,x+y>\frac{۱}{۲}\,,\,y<\frac{۱}{۲}\,,\,x<\frac{۱}{۲}\}$$



اکنون با توجه به شکل داریم: $A(E)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}$ و $A(S)=۱\times۱=۱$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{۱}=\frac{۱}{۸}$$

***

تذکر: اگر E یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S باشد. در این صورت:

الف : $P(S)=۱$ ب : $P(\Phi)=۰$ ج : $۰\le P(E)\le ۱$

***

نتیجه : برای هر پیشامد تصادفی گسسته که دارای k برآمد باشد. همواره داریم.

$$E=\{e_۱,e_۲,...,e_k\}$$

برآمد	$e_۱$	$e_۲$	$e_۳$	.....	e_k
احتمال	$P(e_۱)$	$P(e_۲)$	$P(e_۳)$	.....	$P(e_k)$

$$P(E)=P(e_۱)+P(e_۲)+...+P(e_k)=\sum_{i=۱}^{k}P(e_i)$$

پس مجموع احتمالات وقوع هر یک از برآمد های فضای نمونه ای برابر یک است. یعنی :

$$S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$$

برآمد	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	.....	s_n	جمع
احتمال	$P(s_۱)$	$P(s_۲)$	$P(s_۳)$	.....	$P(s_n)$	۱

$$P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+...+P(s_n)=\sum_{i=۱}^{n}P(s_i)=۱$$

***

تمرین : درستی نتیجه ی فوق را در پرتاب یک سکه سالم و پرتاب یک تاس سالم بررسی کنید.

حل : بررسی برای پرتاب یک سکه ی سالم

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱

$$P(S)=P(R)+P(P)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

بررسی برای پرتاب یک تاس سالم

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۱

$$P(S)=P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

***

تمرین : سکه ای در پرتاب طوری سنگینی می کند که احتمال آمدن رو دو برابر احتمال آمدن پشت است. احتمال آمـدن رو و پشت را محاسبه کنید.

حل :

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$۲x$	x	۱

$$P(S)=۲x+x=۱\rightarrow ۳x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases}P(R)=۲x=۲(\frac{۱}{۳})=\frac{۲}{۳}\\P(P)=x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

***

تمرین : تاسی طوری ساخته شده است که وقتی پرتاب شود، احتمال آمدن عدد زوج دو برابر احتمال آمدن عدد فرد است.

مطلوبست محاسبه ی :

الف : احتمال آمدن عدد ۵ ب : احتمال آمدن عدد ۴ ج : احتمال پیشامد $\{۲,۳,۵\}$

حل :

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	x	$۲x$	x	$۲x$	x	$۲x$	۱

$$P(S)=x+۲x+x+۲x+x+۲x=۱\rightarrow ۹x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

$$P(۵)=x=\frac{۱}{۹}$$

$$P(۴)=۲x=۲(\frac{۱}{۹})=\frac{۲}{۹}$$

$$P(\{۲,۳,۵\})=P(۲)+P(۳)+P(۵)=۲x+x+x=۴x=۴(\frac{۱}{۹})=\frac{۴}{۹}$$

***

تمرین : تاسی طوری ساخته شده است که وقتی پرتاب شود، احتمال آمدن عدد زوج سه برابر احتمال آمدن عدد فرد است.

اگر در یک پرتاب تاس ، A پیشامد وقوع عدد بزرگتر از ۲ باشد، $P(A)$را محاسبه کنید.

حل:

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	x	$۳x$	x	$۳x$	x	$۳x$	۱

$$P(S)=x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱\rightarrow ۱۲x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(A)=P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=x+۳x+x+۳x=۸x=۸\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

***

تمرین : با توجه به جدول زیر :

الف : مقدار x را تعیین کنید. ب : احتمال پیشامد $\{a,b\}$ را تعیین کنید.

برآمد	a	b	c	جمع
احتمال	$۳x$	x	$۲x$	۱

حل:

$$P(S) = ۳x + x + ۲x = ۱ \to ۶x = ۱ \to x = \frac{۱}{۶}$$

$$P(\{a,b\}) = P(a) + P(b) = ۳x + x = ۴x = ۴(\frac{۱}{۶}) = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

تمرین: فرض کنیم $S = \{a,b,c,d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی باشد و داشته باشیم $P(d) = \frac{۳}{۸}$ و

$P(a) = P(b) = ۷P(c)$.

الف : مقدار $P(b)$ را محاسبه کنید. ب : مقدار $P(\{a,c\})$ را بیابید.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	a	b	c	d	جمع
احتمال	$۷x$	$۷x$	x	$\frac{۳}{۸}$	۱

$$P(S) = ۷x + ۷x + x + \frac{۳}{۸} = ۱ \to ۱۵x = \frac{۵}{۸} \to x = \frac{۱}{۲۴}$$

$$P(b) = ۷x = ۷(\frac{۱}{۲۴}) = \frac{۷}{۲۴}$$

$$P(\{a,c\}) = P(a) + P(c) = ۷x + x = ۸x = ۸(\frac{۱}{۲۴}) = \frac{۱}{۳}$$

***

تمرین: در فضای نمونه ای $S = \{a,b,c\}$ اگر داشته باشیم : $P\{a,b\} = ۳p\{c\}$

در این صورت، مقدار $P(c)$ را محاسبه کنید.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	a	b	c	جمع
احتمال	$۳x$		x	۱

$$P(S) = ۳x + x = ۱ \to x = \frac{۱}{۴}$$

$$P(c) = x = \frac{۱}{۴}$$

قوانین احتمال :

اگر A و B دو پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S باشند، در این صورت :

الف :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

این رابطه را قانون شمول و عدم شمول می نامند.

ب :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ج:

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲ \times P(A \cap B)$$

د: اگر E^c مکمل پیشامد E باشد، در این صورت:

۱ : اجتماع دو پیشامد E و E^c برابر فضای نمونه ای است.

$$E \cup E^c = S \to P(E \cup E^c) = P(S) = ۱$$

۲ : اشتراک دو پیشامد E و E^c تهی است. یعنی دو پیشامد E و E^c ناسازگارند. پس:

$$E \cap E^c = \Phi \to P(E \cap E^c) = P(\Phi) = ۰$$

حال با توجه به دو نتیجه ی فوق خواهیم داشت:

$$P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c) - P(E \cap E^c)$$
$$\to ۱ = P(E) + P(E^c) - ۰ \to P(E) + P(E^c) = ۱$$

پس :

$$P(E) = ۱ - P(E^c) \quad \text{یا} \quad P(E^c) = ۱ - P(E)$$

***

هـ: اگر A و B دو پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S و $A = B$ باشند.آنگاه $P(A) = P(B)$.

ولی عکس این مطلب درست نمی باشد.

www.mathtower.ir

نتیجه : اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، در این صورت:

الف : $P(A \cap B) = P(\Phi) = ۰$

ب : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ج : $P(A - B) = P(A)$

د : $P(A \Delta B) = P(A) + P(B)$

***

تمرین : تاسی را پرتاب می کنیم.

الف : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد یا مضربی از ۳ رخ دهد.

ب : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد و مضربی از ۳ رخ دهد.

ج : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد رخ دهد و مضرب ۳ رخ ندهد.

حل :

فضای نمونه ای $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(S) = ۶$

عدد فرد $A = \{۱,۳,۵\}$

مضرب ۳ $B = \{۳,۶\}$

الف :

$$A \cup B = \{۱,۳,۵,۶\} \rightarrow n(A \cup B) = ۴$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

ب :

$$A \cap B = \{۳\} \rightarrow n(A \cap B) = ۱$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۶}$$

ج :

$$A-B=\{۱,۵\}\rightarrow n(A-B)=۲$$
$$\Rightarrow P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

تمرین : اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم :

$$P(A)=\frac{۲}{۵}\ ,\ P(B)=\frac{۱}{۴}\ \text{و}\ P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}$$

مطلوبست محاسبه ی :

الف : $P(A\cup B)$ ب : $P(A-B)$ ج: $P(A\Delta B)$

حل :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۸+۵-۲}{۲۰}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۴-۱}{۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲\times P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۴}-۲\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۸+۵-۴}{۲۰}=\frac{۹}{۲۰}$$

***

تمرین : احتمال اینکه دانش آموزی از درس های فیزیک و ریاضی نمره بیاورد، به ترتیب ۰/۴ و ۰/۳ است. اگر احتمال گذراندن حداقل یکی از آن دو درس ۰/۶ باشد. احتمال آن را حساب کنید که این دانش آموز از هر دو درس نمره بیاورد.

حل:

$$P(F)=۰/۴\quad ,\quad P(R)=۰/۳\quad ,\quad P(F\cup R)=۰/۶\quad ,\quad P(F\cap R)=?$$
$$P(F\cup R)=P(F)+P(R)-P(F\cap R)$$
$$۰/۶=۰/۴+۰/۳-x\rightarrow ۰/۶=۰/۷-x\rightarrow ۰/۶-۰/۷=-x\rightarrow -۰/۱=-x\rightarrow ۰/۱=x$$
$$\Rightarrow P(F\cap R)=x=۰/۱$$

***

تمرین : برای کارکنان یک اداره جدول زیر تنظیم شده است. حال یک نفر به تصادف از بین آنها انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که:

الف : بازی شخص انتخاب شده متوسط باشد.

	خوب	متوسط	ضعیف	جمع
فوتبال	۱۰	۱۸	۵	۳۳
بسکتبال	۱۸	۵	۹	۳۲
والیبال	۴	۱۰	۱	۱۵
جمع	۳۲	۳۳	۱۵	۸۰

ب: این شخص در تیم بسکتبال باشد.

ج: بازی این شخص متوسط و او در تیم بسکتبال باشد.

د : بازی این شخص خوب یا او در تیم والیبال باشد.

هـ : این شخص در تیم بسکتبال نباشد.

حل:

الف: $P(A)=\frac{۳۳}{۸۰}$

ب: $P(B)=\frac{۳۲}{۸۰}$

ج: $P(A\cap B)=\frac{۵}{۸۰}$

د: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳۲}{۸۰}+\frac{۱۵}{۸۰}-\frac{۴}{۸۰}=\frac{۴۳}{۸۰}$

هـ : $P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۳۲}{۸۰}=\frac{۴۸}{۸۰}=\frac{۳}{۵}$

***

تمرین : در پرتاب یک تاس احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد یا مضرب ۴ بیاید.

حل: چون تمام اعداد فرد مضرب ۴ نیستند، لذا پیشامد های آمدن عدد فرد و مضرب های ۴ ناسازگار هستند.از طرفی

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\rightarrow n(S)=۶$

عدد فرد $A=\{۱,۳,۵\}\rightarrow n(A)=۳$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مضرب۴ $B=\{۴\}\rightarrow n(B)=۱$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A \cap B) = P(\Phi) = ۰$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} = \frac{۳+۱}{۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

***

تمرین: اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را روی صد کارت می نویسیم و یک کارت به تصادف از میان آنها استخراج می کنیم.

مطلوبست احتمال اینکه عدد روی این کارت:

الف : بر ۴ یا بر ۶ بخش پذیر باشد. ب : بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

ج : فقط بر یکی از دو عدد ۴ یا ۶ بخش پذیر باشد.

حل :

$$S = \{۱,۲,۳,...,۱۰۰\} \to n(S) = b - a + ۱ = ۱۰۰ - ۱ + ۱ = ۱۰۰$$

$A = \{۴,۸,...,۹۶,۱۰۰\} \to n(A) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۱۰۰-۴}{۴} + ۱ = ۲۵$ بخش پذیر بر۴

$B = \{۶,۱۲,...,۹۶\} \to n(B) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۹۶-۶}{۶} + ۱ = ۱۶$ بخش پذیر بر۶

$A \cap B = \{۱۲,۲۴,...,۹۶\} \to n(A \cap B) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۹۶-۱۲}{۱۲} + ۱ = ۸$ بخش پذیر بر۱۲(ک م م ۴ و۶)

الف :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۲۵}{۱۰۰} + \frac{۱۶}{۱۰۰} - \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۳۳}{۱۰۰}$$

ب :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۲۵}{۱۰۰} - \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۱۷}{۱۰۰}$$

ج:

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲ \times P(A \cap B) = \frac{۲۵}{۱۰۰} + \frac{۱۶}{۱۰۰} - ۲ \times \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۲۵+۱۶-۱۶}{۱۰۰} = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴}$$

تمرین : در یک روز سرد زمستانی، احتمال آمدن برف ۰/۷۰ می باشد احتمال آن را حساب کنید که برف نیاید.

حل:

احتمال آمدن برف $P(E) = ۰/۷۰$

احتمال نیامدن برف $P(E^c) = ۱ - P(E) = ۱ - ۰/۷۰ = ۰/۳۰$

***

تمرین : تاسی را دو بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که مجموع شماره های ظاهر شده ۳ نباشد.

حل :

$$n(S) = ۳۶$$
$$A = \{(۱,۲),(۲,۱)\} \rightarrow n(A) = ۲$$
$$P(A^c) = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۲}{۳۶} = \frac{۳۶-۲}{۳۶} = \frac{۳۴}{۳۶} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

***

تمرین : اگر A یک پیشامد از یک آزمایش تصادفی باشد و احتمال وقوع A با شش برابر احتمال وقوع A^c مساوی باشد. احتمال وقوع A^c را حساب کنید.

حل :

$$P(A^c) = x \rightarrow P(A) = ۶x$$
$$P(A) + P(A^c) = ۱ \rightarrow ۶x + x = ۱ \rightarrow ۷x = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۷}$$

***

تمرین : اگر $P(A) = \frac{۲}{۱۰}$ و $P(B) = \frac{۵}{۱۰}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۱۰}$ باشد. تساوی های زیر را کامل کنید.

الف : $P(A^c) =$ ج : $P(A \cup B) =$ هـ : $P(A \cup B)^c =$

ب : $P(B^c) =$ د : $P(A \cap B)^c =$

حل :

$$P(A^c) = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱۰-۲}{۱۰} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$
$$P(B^c) = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱۰-۵}{۱۰} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\cap B)^{c}=۱-P(A\cap B)=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۰-۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

$$P(A\cup B)^{c}=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۵-۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

***

تمرین : اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، و داشته باشیم: $P(B^{c})=\frac{۳}{۷}$ و $P(A)=\frac{۲}{۷}$

در این صورت $P(A\cup B)$ را حساب کنید.

حل :

$$P(B)=۱-P(B^{c})=۱-\frac{۳}{۷}=\frac{۷-۳}{۷}=\frac{۴}{۷}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۲}{۷}+\frac{۴}{۷}=\frac{۶}{۷}$$

***

تمرین : اگر $P(A)=\frac{۳}{۵}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۵}$ مطلوبست تعیین :

۱: $P(A-B)$ ۳: $P(A\cup B)$ ۵: $P(A^{c}\cap B^{c})$

۲: $P(B)$ ۴: $P(A\cup B)^{c}$ ۶: $P(A\Delta B)^{c}$

حل:

۱:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\rightarrow P(A-B)=\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

۲:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\rightarrow \frac{۱}{۵}=P(B)-\frac{۱}{۵}\rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

۳ :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

۴ :

$$P(A\cup B)^{c}=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

۵ :

$$P(A^{c}\cap B^{c})=P(A\cup B)^{c}=\frac{۱}{۵}$$

۶ :

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲\times P(A\cap B)=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}-۲\times\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\Delta B)^{c}=۱-P(A\Delta B)=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

***

تمرین: سه نفر A و B و C در یک مسابقه شرکت کرده اند، احتمال برد A دو برابر احتمال برد B و احتمال برد C ، $\frac{۱}{۳}$ احتمال برد A است.

الف : احتمال برد A چقدر است. ب : احتمال باخت C چقدر است.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	A	B	C	جمع
احتمال	$۲x$	x	$\frac{۱}{۳}(۲x)$	۱

$$P(S)=۲x+x+\frac{۲}{۳}x=۱\rightarrow\frac{۱۱}{۳}x=۱\rightarrow x=\frac{۳}{۱۱}$$

$$P(A)=۲x=۲(\frac{۳}{۱۱})=\frac{۶}{۱۱}$$

$$P(C)^{c}=P(A)+P(B)=۲x+x=۳x=۳(\frac{۳}{۱۱})=\frac{۹}{۱۱}$$

توجه :

$$P(C)^c = ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۲}{۳}x = ۱ - \frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۱۱}) = \frac{۹}{۱۱}$$

***

تمرین : اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند. هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ب) $P(A - B) = P(A)$

حل:

الف : برای هر دو پیشامد ناسازگار A و B ، واضح است که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \xrightarrow{\div n(S)} \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$
$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ب : چون دو پیشامد A و B ناسازگارند، لذا :

$$A - B = A - (A \cap B) = A \rightarrow A - B = A \rightarrow P(A - B) = P(A)$$

***

تمرین : اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند. هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ب) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اثبات :

الف : واضح است که دو پیشامد $A - B$ و $A \cap B$ ناسازگار هستند. پس :

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$
$$\rightarrow P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)]$$
$$\rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$
$$\rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ب: واضح است که پیشامد های $A - B$ و B ناسازگار هستند. لذا:

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$
$$\rightarrow P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B]$$
$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$
$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$
$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

تمرین : اگر A و B دو پیشامد دلخواه و $B \subseteq A$ باشند، هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A - B) = P(A) - P(B)$ ب) $P(B) \leq P(A)$

اثبات :

الف :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \xrightarrow{A \cap B = B} P(A - B) = P(A) - P(B)$$

ب :

$$B \subseteq A \rightarrow \Phi \subseteq A - B \rightarrow P(\Phi) \leq P(A - B) \xrightarrow{P(\Phi) = ۰} ۰ \leq P(A - B)$$
$$\rightarrow ۰ \leq P(A) - P(B) \rightarrow P(B) \leq P(A)$$

***

تمرین : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲ \times P(A \cap B)$

ب) $P(A^c \cap B^c) = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

اثبات :

الف:

$$P(A \Delta B) = P[(A \cup B) - (A \cap B)] = P(A \cup B) - P[(A \cup B) \cap (A \cap B)]$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - ۲ \times P(A \cap B)$$

ب:

$$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = ۱ - P(A \cup B)$$
$$= ۱ - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

***

تمرین : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید که :

$$P(A^c \cup B) - P(A \cap B) = P(A^c)$$

حل:

$$P(A^c \cup B) - P(A \cap B) = P(A^c) - P(A^c \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A^c) - \underbrace{P(B \cap A^c)} + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)} = P(A^c) - P(B - A) + P(B - A) = P(A^c)$$

تمرین : اگر A و B و C سه پیشامد دلخواه باشند. ثابت کنید که :

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

اثبات :

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$$
$$= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$
$$= \overbrace{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}^{P(A \cup B)} + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)])$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

***

تمرین : شخصی از شهر اصفهان دیدن می کند، احتمال اینکه از عالی قاپو بازدید کند ۰/۷۴ و احتمال اینکه از بازار اصفهان بازدید کند ۰/۷۰ و احتمال اینکه از مسجد جامع بازدید کند ۰/۶۴ و احتمال اینکه از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند ۰/۴۶ و احتمال اینکه بازار اصفهان و مسجد جامع را ببیند ۰/۴۴ و احتمال اینکه از عالی قاپو و مسجد جامع دیدن کند ۰/۷۲ و احتمال اینکه به بازدید هر سه مکان برود ۰/۳۴ است. احتمال اینکه این شخص لااقل یکی از این سه مکان را دیدن کند، چقدر است.

حل: ابتدا تعریف می کنیم.

$P(A) = ۰/۷۴$ احتمال بازدید از عالی قاپو
$P(B) = ۰/۷۰$ احتمال بازدید از بازار
$P(C) = ۰/۶۴$ احتمال بازدید از مسجد جامع
$P(A \cap B) = ۰/۴۶$ احتمال بازدید از عالی قاپو و بازار
$P(A \cap C) = ۰/۷۲$ احتمال بازدید از عالی قاپو و مسجد جامع
$P(B \cap C) = ۰/۴۴$ احتمال بازدید از بازار و مسجد جامع
$P(A \cap B \cap C) = ۰/۳۴$ احتمال بازدید از هر سه مکان
$P(A \cup B \cup C) = ?$ احتمال بازدید حداقل یکی

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= ۰/۷۴ + ۰/۷۰ + ۰/۶۴ - ۰/۴۶ - ۰/۷۲ - ۰/۴۴ + ۰/۳۴ = ۰/۸۰$$

***

نتیجه : اگر A و B و C سه پیشامد ناسازگار باشند. در این صورت :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

***

بحث های تکمیلی احتمال

آزمایش برنولی : هر آزمایش که فضای نمونه ای آن تنها دارای دو عضو باشد، را آزمایش برنولی می نامند. مانند نتیجه ی پرتاب یک سکه ، نتیجه ی پاسخ تصادفی یک سئوال تستی

اگر در یک آزمایش برنولی فقط یک پیشامد مورد نظر باشد، آن را پیروزی[1] با احتمال p و دیگری را شکست با احتمال q می نامند.

برآمد	پیروزی	شکست	جمع
احتمال	p	q	۱

$$p+q=۱$$

***

تمرین : یک سکه ی طوری ساخته شده است که احتمال آمدن رو سه برابر احتمال آمدن پشت است. احتمال آن را حساب کنید که در یک بار پرتاب رو بیاید.

حل: این آزمایش ، یک آزمایش برنولی است . لذا:

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$۳x$	x	۱

$$۳x+x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$\therefore\ P(R)=۳x=۳(\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۴}$$

تابع احتمال : برای مفاهیم مربوط به احتمال نیز می توان تابع تعریف نمود. این تابع با دو شرط زیر را تابع توزیع احتمال یـا بـه اختصار تابع احتمال می نامند.

۱) $۰\le P(X_i)\le ۱$ و ۲) $\sum_{i=۱}^{n}P(X_i)=۱$

[1] . در آزمایش های دو حالته (برنولی) پیشامدی که مسئله در پی آن است را پیروزی و دیگری را شکست انتخاب کنید.

www.mathtower.ir

مثال : تابع زیر یک تابع احتمال می باشد.

$$P(X_i)=\begin{cases}\frac{۱}{۶} & X_i=۱,۲,۳,۴\\ \frac{۱}{۳} & X_i=۵\end{cases}$$

این تابع را می توان به شکل زیر نیز نوشت.

X_i	۱	۲	۳	۴	۵	جمع
$P(X_i)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	۱

تمرین : نشان دهید که تابع زیر نیز یک تابع توزیع احتمال است.

$$P(X_i)=\frac{۲X_i-۱}{۳۶} \qquad X_i=۱,۲,۳,۴,۵,۶$$

***

تابع احتمال دو جمله ای : اگر آزمایش برنولی را n بار به طور مستقل تکرار کنیم. نوع آزمایش را آزمایش دو جمله ای می نامند. احتمال پیروزی به اندازه ی X_i از کل n بار تکرار آزمایش به صورت زیر است.

$$P(X_i)=\binom{n}{X_i}p^{X_i}.q^{n-X_i} \qquad X_i=۰,۱,۲,....,n$$

که در آن p و q احتمال پیروزی و شکست در یک بار آزمایش برنولی است.

مثال: پرتاب n سکه با هم دارای توزیع دو جمله ای است.

***

تمرین : یک سکه طوری ساخته شده است که احتمال آمدن رو $\frac{۱}{۴}$ و پشت $\frac{۳}{۴}$ است. این سکه را ۸ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه سه بار رو آید را به دست آورید.

حل: آمدن رو را پیروزی و آمدن پشت را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p=\frac{۱}{۴}\rightarrow q=\frac{۳}{۴}$$

$$P(۳)=\binom{۸}{۳}\times(\frac{۱}{۴})^{۳}\times(\frac{۳}{۴})^{۵}=۰/۲۴$$

تمرین : خانواده ای دارای ۶ فرزند است. اگر احتمال تولد فرزند پسر و تولد فرزند دختر مساوی باشد. احتمال اینکه ۲ فرزند، پسر باشد را بدست آورید.

حل: تولد فرزند پسر را پیروزی و تولد فرزند دختر را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p=\frac{۱}{۲}\rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

$$P(۲)=\binom{۶}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۴}=\binom{۶}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۶}=۰/۲۳$$

***

تمرین : به دانش آموزی ۱۰ سئوال تستی چهار گزینه ای داده شده است و قرار شد که او به گزینه ها به تصادف پاسخ دهد.

الف : چقدر احتمال دارد که او ۷ سئوال را پاسخ صحیح دهد؟

ب : چقدر احتمال دارد که او حداقل به ۷ سئوال پاسخ صحیح دهد؟

حل: پاسخ صحیح را پیروزی و پاسخ غلط را شکست فرض می کنیم. پس:

الف :

$$p=\frac{۱}{۴}\rightarrow q=\frac{۳}{۴}$$

$$p(۷)=\binom{۱۰}{۷}\times(\frac{۱}{۴})^{۷}\times(\frac{۳}{۴})^{۳}=$$

ب :

$$P(X=۷)+P(X=۸)+P(X=۹)+P(X=۱۰)$$
$$=\binom{۱۰}{۷}\times(\frac{۱}{۴})^{۷}\times(\frac{۳}{۴})^{۳}+\binom{۱۰}{۸}\times(\frac{۱}{۴})^{۸}\times(\frac{۳}{۴})^{۲}+\binom{۱۰}{۹}\times(\frac{۱}{۴})^{۹}\times(\frac{۳}{۴})^{۱}+\binom{۱۰}{۱۰}\times(\frac{۱}{۴})^{۱۰}\times(\frac{۳}{۴})^{۰}$$
$$=?$$

***

تمرین : به دانش آموزی ۱۰ سئوال تستی چهار گزینه ای داده شده است و قرار شد که او به گزینه ها بـه تـصادف پاسـخ دهـد. چقدر احتمال دارد که او ۴ سئوال را پاسخ غلط دهد؟

حل: پاسخ غلط را پیروزی و پاسخ صحیح را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p=\frac{۳}{۴}\to q=\frac{۱}{۴}$$

$$P(۴)=\binom{۱۰}{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{۴}\times(\frac{۱}{۴})^{۶}=۱۶۸۰\times\frac{۸۱}{۲۵۶}\times\frac{۱}{۴۰۹۶}=۰/۱۲$$

***

تمرین : احتمال اینکه یک دانه ی ذرت رشد کند، ۰/۲۵ است. اگر ۱۰۰ دانه از این دانه ها کاشته شود.چقدر احتمال دارد کـه ۲۰ تای آنها رشد کند؟

حل: رشد دانه را پیروزی و و عدم رشد آن را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}\to q=\frac{۳}{۴}$$

$$P(۲۰)=\binom{۱۰۰}{۲۰}\times(\frac{۱}{۴})^{۲۰}\times(\frac{۳}{۴})^{۸۰}=$$

***

نتیجه: در پرتاب یک سکه به تعداد n بار اگر احتمال آمدن رو و پشت برابر باشند. احتمال k بار پیروزی بـه شـکل زیـر اسـت. $(۰\le k\le n)$

$$p=\frac{۱}{۲}\to q=\frac{۱}{۲}$$

$$p(k)=\binom{n}{k}\times(\frac{۱}{۲})^{k}\times(\frac{۱}{۲})^{n-k}=\binom{n}{k}\times(\frac{۱}{۲})^{n}=\binom{n}{k}\times\frac{۱}{۲^{n}}=\frac{\binom{n}{k}}{۲^{n}}$$

توجه داشته باشید که این نتیجه برای پرتاب یک سکه ی سالم ، تولد نوزاد، پاسخ تصادفی به سئوال های دو گزینه ای و .... که در تمام آنها $p = q = \frac{۱}{۲}$ باشد، بکار می رود.

***

تمرین: سکه ای را ۱۰۰ بار انداخته ایم، احتمال آمدن ۶۰ بار پشت را بدست آورید.

حل:

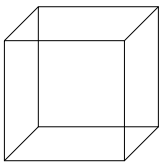
$$p = q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(۶۰) = \binom{۱۰۰}{۶۰} \times \frac{۱}{۲^{۱۰۰}} =$$

تمرین : سه وجه مکعبی زرد و سه وجه دیگر آن سبز می باشند. این مکعب را ۷ بار پرتاب می کنیم. چقدر احتمال دارد که ۳ بار سبز بیاید.

حل :

$$p = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$

$$P(۳) = \binom{۷}{۳} \times \frac{۱}{۲^{۷}} = ۳۵ \times \frac{۱}{۱۲۸} = \frac{۳۵}{۱۲۸}$$



تمرین: یک تاس سالم را ۷ بار انداخته ایم. احتمال آن را حساب کنید که ۵ بار عدد زوج ظاهر شود.

حل:

$$p = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \rightarrow q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(۵) = \frac{\binom{۷}{۵}}{۲^{۷}} = \frac{۲۱}{۱۲۸}$$

***

تابع احتمال هندسی : گاهی در آزمایش های تصادفی، فضای نمونه ای شامل دو گروه m و n عضوی می باشد. احتمال انتخاب k عضو که X_i تای آنها از بین گروه m عضوی و بقیه از گروه n عضوی باشد، به شکل زیر محاسبه می شود.

$$P(X_i)=\frac{\overset{\text{گروه اول}}{\binom{m}{X_i}}\times\overset{\text{گروه دوم}}{\binom{n}{k-X_i}}}{\overset{\text{کل}}{\binom{m+n}{k}}}$$

***

تمرین : از کلاس دوم یک دبیرستان ۴ نفر و از کلاس سوم ۷ نفر داوطلب بازی در تیم والیبال شده اند، در صورتی که بازی در تیم فقط برای ۶ نفر ازآنها امکان دارد. احتمال آن را حساب کنید که ۲ نفر از کلاس دوم و ۴ نفر از کلاس سوم انتخاب شوند.

حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۷}{۴}}{\binom{۱۱}{۶}}=\frac{۶\times۳۵}{۴۶۲}=\frac{۵}{۱۱}$$

تمرین: با توجه به تمرین قبل احتمال آن را حساب کنید که حداقل ۵ نفر از کلاس سوم انتخاب شوند.

حل:

$$P(x)=\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۱}{۶}}+\frac{\binom{۴}{۰}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۱}{۶}}=\frac{۴\times۲۱}{۴۶۲}+\frac{۱\times۷}{۴۶۲}=\frac{۱۲}{۶۶}+\frac{۱}{۶۶}=\frac{۱۳}{۶۶}$$

***

تمرین: سه لامپ از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می باشند، انتخاب می کنیم.

الف : احتمال آن را تعیین کنید که هیچکدام معیوب نباشند.

ب : احتمال آن را تعیین کنید که فقط یک لامپ معیوب باشد.

حل :

الف) $P(x)=\frac{\binom{۵}{۰}\times\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{۱\times۱۲۰}{۴۵۵}=\frac{۲۴}{۹۱}$

ب) $P(x)=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{۵\times۴۵}{۴۵۵}=\frac{۴۵}{۹۱}$

***

تمرین: ۶ نفر زن و ۷ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده اند. با این حال امکان استخدام تنها برای ۷ نفر از آنها وجود دارد. مطلوبست احتمال اینکه :

الف: ۵ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب : فقط یک زن انتخاب شود.

ج : ۴ زن و ۳ مرد انتخاب شوند.

د : بیش از ۴ مرد انتخاب شوند.

حل :

الف) $P(x)=\frac{\binom{۶}{۵}\times\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۳}{۷}}=\frac{۶\times۲۱}{۱۷۱۶}=\frac{۱۰۵}{۱۴۳}$

ب) $P(x)=\frac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۳}{۷}}=\frac{۶\times۷}{۱۷۱۶}=\frac{۷}{۲۸۶}$

ج) $P(x)=\frac{\binom{۶}{۴}\times\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۳}{۷}}=\frac{۱۵\times۳۵}{۱۷۱۶}=\frac{۱۷۵}{۵۷۲}$

د)

$$P(x)=\frac{\binom{۶}{۲}\times\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۳}{۷}}+\frac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۳}{۷}}+\frac{\binom{۶}{۰}\times\binom{۷}{۷}}{\binom{۱۳}{۷}}=\frac{۱۵\times۲۱}{۱۷۱۶}+\frac{۶\times۷}{۱۷۱۶}+\frac{۱\times۱}{۱۷۱۶}=\frac{۳۱۵+۴۲+۱}{۱۷۱۶}=\frac{۳۵۸}{۱۷۱۶}=\frac{۱۷۹}{۵۸۵}$$

***

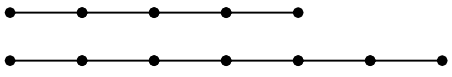
تمرین: از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۲ سیب فاسد ، ۴ سیب به طور تصادفی بیرون می آوریم. مطلوبست احتمال آنکه هر ۴ سیب سالم باشند.

حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۴}{۴}\times\binom{۲}{۰}}{\binom{۶}{۴}}=\frac{۱\times۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

***

تمرین : دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند، از این نقطه ها، سه نقطه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این سه نقطه رأس های یک مثلث باشند، را به دست آورید.



حل : می توان این نقطه ها را دو گروه ۵ نقطه ای و ۷ نقطه ای در نظر گرفت.

حال برای ایجاد مثلث باید دو نقطه از یک گروه و یک نقطه از گروه دیگر انتخاب کرد. در این صورت داریم:

$$P(x)=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۳}}+\frac{\binom{۵}{۲}\times\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۵\times۲۱}{۲۲۰}+\frac{۱۰\times۷}{۲۲۰}=\frac{۱۷۵}{۲۲۰}=\frac{۳۵}{۴۴}$$

***

توجه : تابع احتمال هندسی برای بیش از دو گروه نیز قابل تعمیم است.

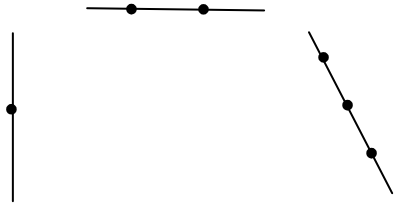
***

تمرین: ۳ نفر دانش آموز از کلاس سوم و ۴ نفر از کلاس دوم و ۵ نفر از کلاس اول داوطلب بازی در تیم شطرنج دبیرستان شده اند. در صورتی که بازی در تیم فقط برای ۶ نفر امکان دارد، احتمال آن را حساب کنید که ۲ نفر از سوم و یک نفر از دوم و بقیه از اول انتخاب شوند.

حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۲}{۶}}=\frac{۳\times۴\times۱۰}{۹۲۴}=\frac{۱۰}{۷۷}$$

تمرین: از میان ۱۰ نقطه مطابق شکل زیر ، چهار نقطه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آنرا بیابید که با این ۴ نقطه یک چهارضلعی ساخته شود که روی هر خط فقط یک رأس آن قرار بگیرد.



حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$$

***

تمرین : از بین ۲ افسر و ۴ سرباز و۳ منشی ،کمیته ای ۵ نفره تشکیل می دهیم. مطلوب است احتمال آنکه

الف : در کمیته، منشی وجود نداشته باشد.

ب : در کمیته ، حداکثر یک سرباز وجود داشته باشد.

***